УДК 517.548.2+517.548.9+517.547.26

Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов

Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций

Доказано, что открытые дискретные Q-отображения в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$, абсолютно непрерывны на линиях, принадлежат классу Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, дифференцируемы почти всюду и обладают N^{-1}-свойством, т.е. обратным к N-свойству Лузина. Установлено, что семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений, выпускающих множество положительной емкости, нормально при условии, что Q имеет либо конечное среднее колебание в каждой точке, либо только логарифмические особенности порядка не выше $n-1$. Установлено, что при этих же условиях на Q изолированная особенность $x_0 \in D$ открытого дискретного кольцевого Q-отображения $f\colon D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}}^n$ устранима и, более того, продолженное отображение открыто и дискретно. На основе этих результатов получены аналоги хорошо известных теорем Лиувилля, Пикара и Сохоцкого.

Библиография: 34 названия.

Ключевые слова: квазиконформные отображения и их обобщения, модули семейств кривых, емкость, устранение особенностей отображений, теоремы типа теорем Лиувилля, Сохоцкого, Пикара.

§ 1. Введение

Кольцевые отображения являются подвидом отображений конечного искажения, которые активно изучаются в настоящее время и включают в себя, в частности, класс аналитических функций, классы квазиконформных и квазирегулярных отображений. Настоящая работа выполнена в рамках исследований, инициированных известным математиком Г. Д. Суворовым, считавшим "идеалом (и целью!) в теории функций достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств (метрических и топологических)" (см. [1]).

Как известно, в основе геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, лежит условие

$$M(f(\Gamma)) \leqslant K M(\Gamma) \tag{1.1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M – конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geqslant 1$ – некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более чем в K раз.

Пусть теперь в основе определения рассматриваемого класса отображений вместо соотношения (1.1) лежит неравенство вида

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \int_D Q(x)\rho^n(x)\,dm(x), \tag{1.2}$$

где m – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ – произвольная неотрицательная борелевская функция такая, что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую единицы в метрике ρ, т.е. $\int_\gamma \rho(x)\,|dx| \geqslant 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$, а $Q\colon D \to [1,\infty]$ – вещественнозначная функция (см., например, [2; гл. IV]. По-видимому, впервые неравенство вида (1.2) было установлено О. Лехто и К. Вертаненом для квазиконформных отображений на плоскости в [3; с. 221] и Ю. Ф. Струговым в [4] для так называемых отображений, квазиконформных в среднем в пространстве. В монографии В.М. Миклюкова [5] исследовались другие классы отображений, удовлетворяющих оценкам, имеющим некоторое сходство с упомянутым выше неравенством. Соотношение (1.2) установлено в работе [6] для квазиконформных отображений в пространстве, где Q равно $K_I(x,f)$ ($K_I(x,f)$ – внутренняя дилатация отображения f).

В случае, когда $Q(x) \leqslant K$ почти всюду (отображение f в этом случае квазирегулярно), мы снова приходим к неравенству (1.1). По поводу определений и свойств квазирегулярных отображений (или отображений с ограниченным искажением) см., например, [7]–[9]. В случае неограниченной функции $Q(x)$ неравенство (1.2) означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом Q, $M(f(\Gamma)) \leqslant M_Q(\Gamma)$ (см. [10]). В дальнейшем мы будем предполагать, что контролируемым образом искажаются не все кривые семейства Γ, а только "некоторые". Именно, ограничимся рассмотрением только тех семейств кривых Γ, которые соединяют концентрические сферы с центром в фиксированной точке заданной области; для получения ряда свойств отображений, удовлетворяющих неравенствам типа (1.2), таких семейств Γ уже вполне достаточно. Неравенство вида (1.2), выполненное для упомянутых выше семейств кривых, положено в основу определения кольцевых Q-отображений. Основная задача настоящей работы – описать свойства отображения f, если *a priori* известно, что оно удовлетворяет оценкам вида (1.2). Подробнее, пусть $x_0 \in D$, $A = A(r_1,r_2,x_0)$ – сферическое кольцо, центрированное в точке x_0, с радиусами r_1 и r_2 ($0 < r_1 < r_2 < r_0 := \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$), $S_i = S(x_0,r_i)$ – сфера с центром в точке x_0 радиуса r_i, $i=1,2$, а $\Gamma(S_1,S_2,A)$ – семейство всех кривых, соединяющих S_1 и S_2 внутри области A. Отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}^n$ условимся называть *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in D$, если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1,S_2,A))) \leqslant \int_A Q(x)\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{1.3}$$

выполнено в кольце A для произвольных r_1, r_2, указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geqslant 1.$$

Слово "кольцевое" в данном выше определении указывает на происхождение семейства кривых $\Gamma(S_1, S_2, A)$, входящих в левую часть неравенства (1.3), а "Q-отображение" – на заданную вещественнозначную функцию Q в правой части (1.3).

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Утверждение 1.1. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению вида* (1.3) *при $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$ в каждой точке $x_0 \in D$ для соответствующих r_1, r_2 и функций η. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду в D* (*см. теорему* 3.1 *далее*). *Если дополнительно f удовлетворяет более сильному условию* (1.2), *то*

1) *отображение $f \in ACL$ и, более того, $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$* (*см. теорему* 3.2 *и следствие* 3.3);
2) *отображение f имеет N^{-1}-свойство Лузина и якобиан $J(x, f) \neq 0$ почти всюду* (*см. следствия* 3.4 *и* 3.5).

Пусть

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int Q(x)\, dS,$$

где dS – элемент площади поверхности S, ω_{n-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 1.2. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – компактное множество положительной емкости, $\mathfrak{F}_Q$ – семейство открытых дискретных отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, удовлетворяющих соотношению вида* (1.3) *с одним и тем же Q в каждой точке $x_0 \in D$ для соответствующих r_1, r_2 и функций η. Предположим, что либо функция Q имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$, либо $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r \to 0$, для произвольного $x_0 \in D$. Тогда $\mathfrak{F}_Q$ образует нормальное семейство отображений* (*см. теорему* 4.1 *далее*).

Утверждение 1.3. *Пусть $x_0 \in D$, $f\colon D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению вида* (1.3) *в точке x_0 для соответствующих r_1, r_2 и функций η. Предположим, что либо функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r \to 0$. Тогда*

1) *если конформная емкость множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})$ положительна, то отображение f продолжимо в точку x_0 по непрерывности, причем продолженное отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ открыто и дискретно* (*см. теоремы* 5.1 *и* 5.2 *далее*);
2) *если же x_0 – существенная особая точка отображения f, то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдется последовательность $x_k \to x_0$, $k \to \infty$, такая, что $f(x_k) \to a$ при $k \to \infty$* (*см. теорему* 5.6).

Второе заключение утверждения 1.3, представляющее собой аналог хорошо известной теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса для аналитических функций, в случае отображений с ограниченным искажением опубликовано в работе

О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вяйсяля (см. [11; следствие 4.6], и [8; гл. III, следствие 2.11]). В работе [12] В. М. Миклюкова показано, что если квазирегулярное отображение $f\colon \Omega\setminus A\to\mathbb{R}^n$ имеет в каждой точке $x_0\in A$ компактного множества A емкости нуль существенную особенность, то предельным множеством в x_0 будет все пространство $\overline{\mathbb{R}}^n$ (см. теорему 2 в [12]). По устранению особенностей для отображений с конечным искажением см. также [13] и [14]. Отметим также работу [15], связанную с важнейшими исследованиями в смежных направлениях.

§ 2. Основные определения

Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ каждой точки $y\in\mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U\subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ называется *нульмерным*, если каждая компонента связности множества $\{f^{-1}(y)\}$ вырождается в точку для каждого $y\in\mathbb{R}^n$. Запись $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно, запись $G\Subset D$ означает, что $\overline{G}$ – компактное подмножество области D. Будем говорить, что отображение f *сохраняет ориентацию*, если топологический индекс $\mu(y,f,G)>0$ для произвольной области $G\Subset D$ и произвольного $y\in f(G)\setminus f(\partial G)$. Окрестность U точки x_0 называется *нормальной окрестностью отображения* f, если U является нормальной областью f. Для отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, множества $E\subset D$ и $y\in\mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$ как число прообразов точки y во множестве E, т.е.

$$N(y,f,E)=\operatorname{card}\{x\in E: f(x)=y\},\qquad N(f,E)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n}N(y,f,E).$$

Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ – произвольное отображение и существует область $G\Subset D$ такая, что $\overline{G}\cap\{f^{-1}(f(x))\}=\{x\}$. Тогда величина $\mu(f(x),f,G)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x,f)$. Приведенные выше понятия открытости, дискретности, нульмерности, сохранения ориентации естественным образом распространяются на отображения $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$, где $\overline{\mathbb{R}}^n=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ – одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем

$$\begin{gathered}B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-x_0|<r\},\qquad B(r)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|<r\},\\ \mathbb{B}^n=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|<1\},\qquad S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-x_0|=r\},\\ S(r)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|=r\},\qquad \mathbb{S}^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|=1\},\end{gathered}$$

ω_{n-1} – площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, m – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, для множества $A\subset\mathbb{R}^n$ запись $|A|$ означает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$ (иногда мы также используем обозначение $m(A)$), $\operatorname{mes}_1(A)$ обозначает линейную меру Лебега множества $A\subset\mathbb{R}$. Пусть $Q\colon D\to[0,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$

над сферой $|x-x_0|=r$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q(x)\,dS,$$

где dS – элемент площади поверхности S,

$$\fint_A f(x)\,dm(x) := \frac{1}{|A|}\int_A f(x)\,dm(x),$$

$\mathrm{dist}(A,B)$ – евклидово расстояние между множествами $A,B\subset\mathbb{R}^n$, $d(A)$ – евклидов диаметр множества $A\subset\mathbb{R}^n$. Борелева функция $\rho\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\displaystyle\int_\gamma \rho(x)\,|dx|\geqslant 1$ для всех кривых $\gamma\in\Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho\in\mathrm{adm}\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in\mathrm{adm}\Gamma}\int_D \rho^n(x)\,dm(x).$$

Пусть $E,F\subset\overline{\mathbb{R}}^n$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}^n$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E,\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,b)$. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (пишем $\Gamma_1>\Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma\in\Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае $M(\Gamma_1)\leqslant M(\Gamma_2)$ (см. [16; теорема 6.4]). Следующее понятие мотивировано одним из важнейших определений квазиконформности (см. [17]). Пусть $r_0=\mathrm{dist}(x_0,\partial D)$, $Q\colon D\to[0,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция,

$$A(r_1,r_2,x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n : r_1<|x-x_0|<r_2\},\quad S_i=S(x_0,r_i),\qquad i=1,2.$$

Говорят, что $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$ является *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0\in D$, если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1,S_2,A)))\leqslant\int_A Q(x)\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{2.1}$$

выполнено для любого кольца $A=A(r_1,r_2,x_0)$, $0<r_1<r_2<r_0$, и каждой измеримой функции $\eta\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1.$$

Изучение кольцевых Q-отображений, в частности, связано с исследованием классов Соболева (см. последний параграф настоящей статьи), а также с исследованием уравнений типа уравнений Бельтрами, решения которых удовлетворяют соотношениям вида (2.1) (см., например, раздел 11.5 гл. XI в [2]). Заметим, что K-квазиконформные отображения удовлетворяют соотношениям вида (1.2) и (2.1) при $Q(x)\equiv K\in[1,\infty)$. Обратно, если f – гомеоморфизм, удовлетворяющий соотношению вида (1.2) при $Q(x) \equiv K \in [1,\infty)$, то f является K-квазиконформным отображением (см. теорему 34.3 в [16]). Отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ условимся называть *Q-отображением*, если f удовлетворяет соотношению (1.2) для произвольного семейства кривых Γ в области D и каждой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. В частности, если f – гомеоморфизм, будем называть такое отображение *Q-гомеоморфизмом*. В случае, когда $Q(x) \equiv K \in [1,\infty)$, функция Q просто выносится из-под знака интеграла в (1.2) и в правой части (1.2) возникает модуль. Отметим, что основная трудность при проведении нами доказательства какого-либо свойства отображения f, удовлетворяющего соотношению вида (1.2) или (2.1) при неограниченной функции $Q(x)$, состоит в том, чтобы проследить поведение правой части соответствующего неравенства в зависимости от поведения функции Q. При изучении отображений с ограниченным искажением подобной трудности не возникает, так как в этом случае в правой части (1.2) (либо (2.1)) возникает модуль исходного семейства кривых, помноженный на константу. Доказательства, применявшиеся ранее для извлечения свойств отображений с ограниченным искажением, в значительной мере учитывали указанный выше аспект.

Пусть $x_0 \in D$. По аналогии будем говорить, что отображение $f\colon D\setminus\{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in D$, если выполнено соотношение (2.1). Заметим, что подклассом кольцевых Q-отображений являются *Q-отображения*, т.е. непрерывные отображения, удовлетворяющие оценке (1.2).

Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f, если существует предел $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \infty$. Если $f(x) \to \infty$, $x \to x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом*. Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенной особой точкой* отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если при $x \to x_0$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела. Следующие важные определения можно найти в [8; раздел 3, гл. II]. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $\beta\colon [a,b) \to \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая и $x \in \{f^{-1}(\beta(a))\}$. Кривая $\alpha\colon [a,c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если

(i) $\alpha(a) = x$;

(ii) $f \circ \alpha = \beta\big|_{[a,c)}$;

(iii) если $c < c' \leqslant b$, то не существует кривой $\alpha'\colon [a,c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'\big|_{[a,c)}$ и $f \circ \alpha' = \beta\big|_{[a,c')}$.

Пусть f – открытое дискретное отображение и $x \in \{f^{-1}(\beta(a))\}$. Тогда кривая $\beta\colon [a,b) \to \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (см. [8; гл. 2, следствие 3.3]). В дальнейшем нам понадобятся понятия конденсатора и емкости конденсатора (см., например [9; раздел 10, гл. II]). *Конденсатором* называют пару $E = (A, C)$, где A – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C – компактное подмножество A. *Емкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u\in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n \, dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u\colon A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geqslant 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. В формуле выше, как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$. Известно, что для произвольного конденсатора $E = (A, C)$ выполнено

$$(\operatorname{cap} E)^{n-1} \geqslant b_n \frac{(d(C))^n}{m(A)}, \tag{2.2}$$

где $b_n > 0$ – константа, зависящая только от размерности n (см. например [9; лемма 5.9]). Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеет *нулевую емкость*, пишут $\operatorname{cap} C = 0$, если существует ограниченное открытое множество A такое, что $C \subset A$ и $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. Известно, что (см., например, [7; лемма 3.4, гл. II]) в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого множества A в $\mathbb{R}^n$, содержащего C, будет выполнено $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. В противном случае полагаем $\operatorname{cap} C > 0$. Аналогично можно определить понятие множества емкости нуль в $\overline{\mathbb{R}}^n$ (см., например, [11; раздел 2.12]). Пусть $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$ – открытый n-мерный интервал. Говорят, что отображение $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL (*абсолютно непрерывно на линиях*), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I, параллельных координатным осям. Говорят, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL, когда сужение $f\big|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала I, $\overline{I} \subset D$.

В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}}^n$ на сферу $S^n((1/2)e_{n+1}, 1/2)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \qquad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \qquad x \neq \infty \neq y.$$

Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x, f)$ – якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем

$$\|f'(x)\| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}, \qquad l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Внешняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|},$$

если $J(x, f) \neq 0$. Полагаем $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках. *Внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x, f) \neq 0$. Полагаем $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Напомним, что отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ обладает N^{-1}*-свойством*, если из условия $|f(E)|=0$ следует, что $|E|=0$.

Пусть (X,d) и (X',d') – метрические пространства с расстоянием d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f\colon X\to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m\in\mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f\colon X\to X'$.

Введенное понятие очень тесно связано со следующим понятием. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X\to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0\in X$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ для всех x с $d(x,x_0)<\delta$ и для всех $f\in\mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X.

Напомним, что функция $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ с $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области D, $\varphi\in BMO$, если

$$\|\varphi\|_*=\sup_{B\subset D}\frac{1}{|B|}\int_B|\varphi(x)-\varphi_B|\,dm(x)<\infty, \tag{2.3}$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B\subset D$ и

$$\varphi_B=\frac{1}{|B|}\int_B\varphi(x)\,dm(x)$$

– среднее значение функции φ на шаре B (см., например, [18]).

Хорошо известно, что $L^\infty(D)\subset BMO(D)\subset L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ (см., например, [18]). Следуя работе [19], введем ряд определений, обобщающих определение ограниченного среднего колебания ввиду некоторого отсутствия “равномерности” по заданной области величины, стоящей под знаком sup в (2.3). Будем говорить, что функция $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0\in D$ (пишем $\varphi\in FMO(x_0)$), если

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\fint_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|\,dm(x)<\infty, \tag{2.4}$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon=\fint_{B(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)\,dm(x).$$

Заметим, что при выполнении условия (2.4) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi}_\varepsilon\to\infty$ при $\varepsilon\to0$. Также будем говорить, что $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ – функция конечного среднего колебания в области D (пишем $\varphi\in FMO(D)$ или $\varphi\in FMO$), если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x\in D$. В частности, если в точке $x_0\in D$ выполнено соотношение

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\fint_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)|\,dm(x)<\infty,$$

то функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0. Очевидно, $BMO\subset FMO$. Заметим, что $FMO\neq BMO_{\mathrm{loc}}$ (см., например, [2; раздел 11.2, гл. XI, с. 210]).

Предложение 2.1. *Пусть* $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ – *неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке* $0\in D$, $n\geqslant 2$. *Тогда*

$$\int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0}\frac{\varphi(x)\,dm(x)}{(|x|\log(1/|x|))^n}=O\biggl(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\biggr),\qquad \varepsilon\to 0$$

для некоторого $\varepsilon_0\leqslant\operatorname{dist}(0,\partial D)$ (*см.* [19; следствие 2.3]).

§ 3. Дифференцируемость, ACL и N^{-1}-свойство

Предложение 3.1. *Пусть* $E=(A,C)$ – *произвольный конденсатор в* $\mathbb{R}^n$, *а* Γ_E – *семейство всех кривых вида* $\gamma\colon[a,b)\to A$, $\gamma(a)\in C$, *и* $|\gamma|\cap(A\setminus F)\neq\varnothing$ *для произвольного компакта* $F\subset A$. *Тогда* $\operatorname{cap}E=M(\Gamma_E)$ (*см.* [8; гл. II, предложение 10.2]).

Отметим, что заключение предложения 3.1 остается справедливым для конденсаторов из $\overline{\mathbb{R}}^n$ (см. [8; замечание 10.8, гл. II]).

Иначе говоря, для конденсатора $E=(A,C)$ семейство Γ_E состоит из тех и только тех кривых, которые имеют начало в C, лежат в A и в то же время целиком не лежат ни в одном фиксированном компакте внутри A. В случае ограниченного множества A такие кривые обязаны “подходить” к границе A, но не обязаны быть спрямляемыми и, вообще говоря, к чему-то стремиться.

Теорема 3.1 (дифференцируемость почти всюду). *Пусть* $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$ – *открытое дискретное кольцевое* Q-*отображение, т.е.* f *удовлетворяет* (2.1) *для произвольной* $\eta(t)\colon(r_1,r_2)\to[0,\infty]$, $\displaystyle\int_{r_1}^{r^2}\eta(r)\,dr\geqslant 1$, *причем* $Q\in L^1_{\mathrm{loc}}$. *Тогда* f *дифференцируема почти всюду в* D.

Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств B в D, $\Phi(B)=m(f(B))$. Согласно 2.2, 2.3 и 2.12 из [9] для почти всех $x\in D$ имеем

$$\varphi(x)=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\Phi(B(x,\varepsilon))}{\Omega_n\varepsilon^n}<\infty,\tag{3.1}$$

где $B(x,\varepsilon)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x\in D$ радиуса $\varepsilon>0$. При x, $y\in D$ полагаем

$$L(x,f)=\limsup_{y\to x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}.$$

Итак, по теореме Радемахера–Степанова (см., например, [20; гл. III, § 3.1, теорема 3.1.9]) доказательство теоремы 3.1 сводится к доказательству следующей леммы.

Лемма 3.1. *Пусть* D – *область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, *и* $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$ – *открытое дискретное кольцевое* Q-*отображение с* $Q\in L^1_{\mathrm{loc}}$. *Тогда почти всюду*

$$L(x,f)\leqslant\gamma_n\varphi^{1/n}(x)Q^{(n-1)/n}(x),\tag{3.2}$$

где функция φ *определена соотношением* (3.1), *а* γ_n – *некоторая константа, зависящая только от* n.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Рассмотрим сферическое кольцо

$$R_\varepsilon(x) = \{y : \varepsilon < |x-y| < 2\varepsilon\}, \qquad x \in D,$$

с произвольным $\varepsilon > 0$ таким, что $B(x, 2\varepsilon) \subset D$. Тогда $E = (B(x, 2\varepsilon), \overline{B(x,\varepsilon)})$ – конденсатор в D, а $f(E) = (f(B(x, 2\varepsilon)), f(\overline{B(x,\varepsilon)}))$ – конденсатор в D'. Пусть Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ – семейства кривых в смысле обозначений предложения 3.1. По этому предложению

$$\operatorname{cap}(f(B(x, 2\varepsilon)), f(\overline{B(x,\varepsilon)})) = M(\Gamma_{f(E)}). \tag{3.3}$$

Пусть Γ^* – семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E)}$ с началом в $\overline{B(x,\varepsilon)}$. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Предположим противное, т.е., что существует кривая $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ семейства $\Gamma_{f(E)}$, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha\colon [a, c) \to B(x, 2\varepsilon)$ лежит в некотором компакте K внутри $B(x, 2\varepsilon)$. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ – компакт в $B(x, 2\varepsilon)$. Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ – компакт в $f(B(x, 2\varepsilon))$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{f(E)}$. Рассмотрим множество

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)\}, \qquad t_k \in [a, c), \quad \lim_{k\to\infty} t_k = c.$$

Отметим, что, переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$ в силу непрерывности f будем иметь $f(\alpha(t_k)) \to f(x)$, $k \to \infty$, где $t_k \in [a, c), t_k \to c$, $k \to \infty$. Однако $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \to \beta(c)$, $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(x, 2\varepsilon)$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$ (см. [21; раздел 3.6 гл. I]) имеем

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) \neq \varnothing$$

в силу монотонности последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c))$ и, таким образом, G является связным согласно [21; раздел 9.12 гл. I]. Таким образом, в силу дискретности f множество G не может состоять более чем из одной точки и кривая $\alpha\colon [a, c) \to B(x, 2\varepsilon)$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha\colon [a, c] \to K \subset B(x, 2\varepsilon)$, причем $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Снова по следствию 3.3 гл. II из [8] можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta\big|_{[c,b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, что противоречит максимальности поднятия α. Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и, следовательно,

$$M(\Gamma_{f(E)}) \leqslant M(f(\Gamma^*)) \leqslant M(f(\Gamma_E)).$$

Рассмотрим произвольную последовательность чисел $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon < r_i < 2\varepsilon$, такую, что $r_i \to 2\varepsilon - 0$. Обозначим через Γ_i семейство кривых, соединяющих сферы $|x - y| = \varepsilon$ и $|x - y| = r_i$ в кольце $\varepsilon < |x - y| < r_i$. В таком случае для любого $i \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\Gamma_E > \Gamma_i. \tag{3.4}$$

Рассмотрим параметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_{i,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{r_i - \varepsilon}, & t \in (\varepsilon, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, r_i). \end{cases}$$

По определению кольцевого Q-отображения и в силу (3.4)

$$\begin{aligned} M(f(\Gamma_E)) \leqslant M(f(\Gamma_i)) &\leqslant \frac{1}{(r_i - \varepsilon)^n} \int_{\varepsilon < |x-y| < r_i} Q(y)\, dm(y) \\ &\leqslant \frac{1}{(r_i - \varepsilon)^n} \int_{B(x, 2\varepsilon)} Q(y)\, dm(y). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Переходим в правой части (3.5) к пределу при $i \to \infty$. Получаем

$$M(f(\Gamma_E)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,2\varepsilon)} Q(y)\, dm(y). \tag{3.6}$$

Из (3.3) и (3.6) имеем

$$\operatorname{cap}\bigl(f(B(x, 2\varepsilon)), f(\overline{B(x,\varepsilon)})\bigr) \leqslant \frac{2^n \Omega_n}{m(B(x, 2\varepsilon))} \int_{B(x,2\varepsilon)} Q(y)\, dm(y). \tag{3.7}$$

С другой стороны, используя соотношение (2.2), получаем

$$\operatorname{cap}\bigl(f(B(x, 2\varepsilon)), f(\overline{B(x,\varepsilon)})\bigr) \geqslant \left(C_n \frac{d^n(f(B(x,\varepsilon)))}{m(f(B(x, 2\varepsilon)))} \right)^{1/(n-1)}, \tag{3.8}$$

где C_n – константа, зависящая только от размерности пространства n.

Комбинируя (3.7) и (3.8), получаем, что

$$\frac{d(f(B(x,\varepsilon)))}{\varepsilon} \leqslant \gamma_n \left(\frac{m(f(B(x, 2\varepsilon)))}{m(B(x, 2\varepsilon))} \right)^{1/n} \left(\frac{1}{m(B(x,2\varepsilon))} \int_{B(x,2\varepsilon)} Q(y)\, dm(y) \right)^{(n-1)/n},$$

где γ_n – некоторая постоянная, и, следовательно, почти всюду

$$L(x, f) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{d(f(B(x,\varepsilon)))}{\varepsilon} \leqslant \gamma_n \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x).$$

Следствие 3.1. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}^n$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение, $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тогда f имеет локально суммируемые частные производные.*

Доказательство. Для компактного множества $V \subset D$ имеем

$$\int_V L(x, f)\, dm(x) \leqslant \gamma_n \int_V \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x)\, dm(x).$$

Применяя неравенство Гёльдера (см., например, (17.3) в [22]) при $p = n$ и $q = n/(n-1)$, получаем

$$\int_V \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x)\, dm(x) \leqslant \left(\int_V \varphi(x)\, dm(x) \right)^{1/n} \left(\int_V Q(x)\, dm(x) \right)^{(n-1)/n}.$$

Наконец, используя включение $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$ и лемму 2.3 из [9], приходим к заключению, что

$$\int_V L(x,f)\,dm(x) \leqslant \gamma_n N(f,V)^{2/n} \biggl(\int_V Q(x)\,dm(x)\biggr)^{(n-1)/n} < \infty.$$

Следствие 3.2. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ открытое дискретное кольцевое Q-отображение, $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тогда п.в.*

$$\|f'(x)\|^n \leqslant C_n |J(x,f)| Q^{n-1}(x),$$

где постоянная C_n зависит только от n.

Доказательство. Используя неравенство (3.2) и теорему Лебега (см. раздел 24.4 в [16], а также лемму 2.14 в [9]), получаем нужную оценку.

Теорема 3.2 (абсолютная непрерывность на линиях). *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ открытое дискретное Q-отображение, $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тогда $f \in ACL$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Пусть I – n-мерный интервал в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными осям координат, и $\overline{I} \subset D$. Тогда $I = I_0 \times J$, где I_0 – $(n-1)$-мерный интервал в $\mathbb{R}^{n-1}$, J – одномерный интервал, $J = (a,b)$. Далее отождествляем $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ с $\mathbb{R}^n$. Покажем, что для почти всех сегментов $J_z = \{z\} \times J$, $z \in I_0$, отображение $f\big|_{J_z}$ абсолютно непрерывно. Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств B в I_0, $\Phi(B) = m(f(B \times J))$. Согласно леммам 2.3 и 2.12 из [9] имеем

$$\varphi(z) = \limsup_{r\to 0} \frac{\Phi(B(z,r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} < \infty \tag{3.9}$$

для почти всех $z \in I_0$, где через $B(z,r)$ обозначен шар в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке $z \in I_0$ радиуса r, Ω_{n-1} – объем единичного шара в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Пусть Δ_i, $i = 1,2,\dots$, – некоторая перенумерация совокупности S всех интервалов в J с $\overline{\Delta_i} \subset J$ и рациональными концами. Обозначим

$$\varphi_i(z) := \int_{\Delta_i} Q(z,x_n)\,dx_n. \tag{3.10}$$

Тогда при почти всех z по теореме Фубини (см., например, раздел 8.1 гл. III в [23]) функции $\varphi_i(z)$ почти всюду конечны и интегрируемы по $z \in I_0$. Кроме того, почти всюду существует конечный предел

$$\lim_{r\to 0} \frac{\Phi_i(B(z,r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} = \varphi_i(z), \tag{3.11}$$

где

$$\Phi_i(B(z,r)) = \int_{B(z,r)} \varphi_i(\zeta)\,d\zeta, \qquad z \in I_0.$$

Докажем, что отображение f абсолютно непрерывно на каждом сегменте J_z, $z \in I_0$, где пределы (3.9) и (3.11) существуют и конечны. Обозначим соответствующее множество z через Z_0 и покажем, что сумма диаметров образов любого конечного набора непересекающихся сегментов в $J_z=\{z\}\times J$, $z\in Z_0$, стремится к нулю вместе с суммарной длиной интервалов. В силу непрерывности f вдоль J_z достаточно проверить этот факт для сегментов с рациональными концами в J_z. Итак, пусть $\Delta_i^*=\{z\}\times\overline{\Delta}_i\subset J_z$, $z\in Z_0$, $i=1,2,\ldots,k$, где $\Delta_i\in S$, $i=1,\ldots,k$, взаимно не пересекаются. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{\Delta}_i$, $i=1,\ldots,k$, также попарно не пересекаются.

Пусть $\delta>0$ – произвольное рациональное число, которое меньше половины минимального расстояния между $\overline{\Delta}_i$, $i=1,\ldots,k$, а также меньше их расстояния до концевых точек интервала J. Пусть $\Delta_i=(\alpha_i,\beta_i)$, $\delta_i=(\alpha_i-\delta,\beta_i+\delta)$, $i=1,\ldots,k$, и $A_i=B(z,r)\times\delta_i$, где $B(z,r)$ – открытый шар в $I_0\subset\mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке z и радиуса $r>0$. При малых $r>0$, $E_i=(A_i,\Delta_i^*)$, $i=1,\ldots,k$, – конденсаторы в I и, следовательно, $f(E_i)=(f(A_i),f(\Delta_i^*))$, $i=1,\ldots,k$, – также конденсаторы в $D'=f(D)$. По предложению 3.1 имеем

$$\operatorname{cap}(f(A_i),f(\Delta_i^*))=M(\Gamma_{f(E_i)}).\tag{3.12}$$

Обозначим через $\Gamma_{E_i^*}$ семейство максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E_i)}$ с началом в Δ_i^*. Тогда $\Gamma_{E_i^*}\subset\Gamma_{E_i}$ и из (3.12) получаем, что

$$\operatorname{cap}(f(A_i),f(\Delta_i^*))\leqslant M(f(\Gamma_{E_i})).\tag{3.13}$$

Заметим, что функция

$$\rho_i(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{r}, & \text{если }\ x\in A_i,\\[2mm] 0, & \text{если } x\notin A_i,\end{cases}$$

является допустимой для семейства E_i, поэтому из (3.13) по определению

$$\operatorname{cap}(f(A_i),f(\Delta_i^*))\leqslant\frac{1}{r^n}\int_{A_i}Q(x)\,dm(x).\tag{3.14}$$

С другой стороны, в силу неравенства (2.2) выполнена оценка

$$\operatorname{cap}(f(A_i),f(\Delta_i^*))\geqslant\left(C_n\frac{d_i^n}{m_i}\right)^{1/(n-1)},\tag{3.15}$$

где d_i – диаметр множества $f(\Delta_i^*)$, m_i – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ множества $f(A_i)$, C_n – константа, зависящая только от n.

Комбинируя (3.14) и (3.15), имеем неравенство

$$\left(\frac{d_i^n}{m_i}\right)^{1/(n-1)}\leqslant\frac{c_n}{r^n}\int_{A_i}Q(x)\,dm(x)\tag{3.16}$$

с новой константой c_n, зависящей только от n, при всех $i=1,\ldots,k$.

Далее, по дискретному неравенству Гёльдера (см., например, (17.3) в [22]) с $p=n/(n-1)$ и $q=n$, $x_k=d_k/m_k^{1/n}$ и $y_k=m_k^{1/n}$ получаем, что

$$\sum_{i=1}^k d_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^k\left(\frac{d_i^n}{m_i}\right)^{1/(n-1)}\right)^{(n-1)/n}\left(\sum_{i=1}^k m_i\right)^{1/n},$$

т.е.

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right)^n \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d_i^n}{m_i}\right)^{1/(n-1)}\right)^{n-1}\Phi(B(z,r)),$$

и в силу (3.16) имеем оценку

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right)^n \leqslant \gamma_n \frac{\Phi(B(z,r))}{\Omega_{n-1}r^{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\displaystyle\int_{A_i} Q(x)\,dm(x)}{\Omega_{n-1}r^{n-1}}\right)^{n-1},$$

где γ_n зависит только от n. Переходя к верхнему пределу при $r\to 0$, а затем к пределу при $\delta\to 0$, из (3.9) и (3.11) получаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right)^n \leqslant \gamma_n\varphi(z)\left(\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(z)\right)^{n-1}. \tag{3.17}$$

Наконец, в силу (3.17) абсолютная непрерывность неопределенного интеграла Q над сегментами J_z, $z\in Z_0$, которая следует из (3.10), влечет абсолютную непрерывность на том же сегменте отображения f.

Комбинируя теорему 3.2 и следствие 3.1, получаем следующее заключение (см., например, [24]).

Следствие 3.3. *Пусть $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$ открытое дискретное Q-отображение, $Q\in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тогда $f\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$.*

Следствие 3.4. *Пусть $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$ открытое дискретное Q-отображение, $Q\in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тогда f обладает N^{-1}-свойством.*

Доказательство основано на одном результате работы [25] (см. теорему 1.2). Учитывая, что согласно следствиям 3.2 и 3.3 отображение f по определению является отображением с конечным искажением (см. [26], [27]), достаточно показать, что $Q^{n-1}\in L^{n'-1}_{\mathrm{loc}}$, где $1/n'+1/n=1$. Имеем $n'=n/(n-1)$ и $n'-1=1/(n-1)$. Так как по условию $Q\in L^1_{\mathrm{loc}}$, то $Q^{n-1}\in L^{1/(n-1)}_{\mathrm{loc}}$ и тем самым следствие 3.4 доказано.

Хорошо известно, что N^{-1}-свойство эквивалентно невырожденности якобиана для почти всех точек области (см., например, [28]). Поэтому из следствия 3.4 получаем еще один важный результат.

Следствие 3.5. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$ – открытое дискретное Q-отображение, $Q\in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тогда $J(x,f)\neq 0$ почти всюду в D.*

§ 4. Нормальность семейств Q-отображений

Ниже мы формулируем одну из версий теоремы Арцела–Асколи (см. 20.4 в [16]).

Предложение 4.1. *Если (X,d) – сепарабельное метрическое пространство, а (X',d') – компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f\colon X\to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.*

Лемма 4.1. *Пусть $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение. Предположим, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n_\varepsilon(|x-x_0|)\,dm(x)\leqslant F(\varepsilon),\qquad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{4.1}$$

для некоторого $x_0\in D$, $0<\varepsilon_0<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, и некоторого семейства измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0,\infty)$ функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, таких, что

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0}\psi_\varepsilon(t)\,dt<\infty,\qquad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

Тогда

$$\operatorname{cap} f(E)\leqslant\frac{F(\varepsilon)}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)},\qquad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{4.2}$$

где $E=(A,C)$, $A=B(x_0,r_0)$, $C=\overline{B(x_0,\varepsilon)}$, $r_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$; считаем $r_0:=\infty$ при $D=\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Поскольку f – открытое и непрерывное отображение, $E'=f(E)$ также является конденсатором. Если $\operatorname{cap} f(E)=0$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\operatorname{cap} f(E)\neq 0$. Обозначим через $\Gamma^*_{f(E)}$ семейство всех спрямляемых кривых $\Gamma_{f(E)}$ (см. обозначения предложения 3.1). Ясно, что кривые из $\Gamma^*_{f(E)}$ не проходят через ∞. Отметим, что $M(\Gamma^*_{f(E)})=M(\Gamma_{f(E)})=\operatorname{cap} f(E)$ (см. предложение 3.1). Заметим также, что каждая кривая $\gamma\in\Gamma^*_{f(E)}$ имеет максимальное поднятие при отображении f, лежащее в A с началом в C (см. следствие 3.3 гл. II в [8]). Пусть Γ^* – семейство максимальных поднятий кривых $\Gamma^*_{f(E)}$ при отображении f. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3.1, будем иметь $\Gamma^*\subset\Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma^*_{f(E)}>f(\Gamma^*)$ и, следовательно,

$$M(\Gamma^*_{f(E)})\leqslant M(f(\Gamma^*)). \tag{4.3}$$

Рассмотрим $S_\varepsilon=S(x_0,\varepsilon)$, $S_{\varepsilon_0}=S(x_0,\varepsilon_0)$, где ε_0 – из условия леммы и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Заметим, что поскольку $\Gamma^*\subset\Gamma_E$, то $\Gamma(S_\varepsilon,S_{\varepsilon_0},D)<\Gamma^*$ и, следовательно, $f(\Gamma(S_\varepsilon,S_{\varepsilon_0},D))<f(\Gamma^*)$. Поэтому

$$M(f(\Gamma^*))\leqslant M(f(\Gamma(S_\varepsilon,S_{\varepsilon_0},D))). \tag{4.4}$$

Из соотношений (4.3) и (4.4) следует, что $M(\Gamma^*_{f(E)})\leqslant M(f(\Gamma(S_\varepsilon,S_{\varepsilon_0},D)))$, и, таким образом, по предложению 3.1 имеем

$$\operatorname{cap} f(E)\leqslant M(f(\Gamma(S_\varepsilon,S_{\varepsilon_0},D))). \tag{4.5}$$

Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t)=\psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon,\varepsilon_0)$, $t\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$. Заметим, что

$$\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0}\eta_\varepsilon(t)\,dt=1.$$

Тогда по определению кольцевого Q-отображения

$$M(f(\Gamma(S_\varepsilon,S_{\varepsilon_0},D)))\leqslant\frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n_\varepsilon(|x-x_0|)\,dm(x). \tag{4.6}$$

Наконец, из соотношений (4.1), (4.5) и (4.6) следует соотношение (4.2). Лемма 4.1 доказана.

Предложение 4.2. *Предположим, что E – компактное собственное подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$ такое, что* $\operatorname{cap} E > 0$. *Тогда для каждого $a > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что* $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E, C) \geqslant \delta$, *где C – произвольный континуум в $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ такой, что $h(C) \geqslant a$ (см. лемму 3.11 в [11] или лемму 2.6 гл. III в [8]).*

Лемма 4.2. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – компактное множество положительной емкости, $\mathfrak{F}_Q$ – семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$. Предположим, что*

$$\int_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\,dm(x) = o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)), \qquad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{4.7}$$

для некоторой точки $x_0 \in D$, $0<\varepsilon_0<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, где $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ – семейство измеримых (по Лебегу) неотрицательных на $(0,\infty)$ функций таких, что

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t)\,dt < \infty, \qquad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

Тогда семейство отображений $\mathfrak{F}_Q$ равностепенно непрерывно в точке x_0.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $\mathscr{E} = (A,C)$, $A = B(x_0,r_0)$, $C = \overline{B(x_0,\varepsilon)}$, а $r_0 = \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$. Как и прежде, $r_0 := \infty$ при $D = \mathbb{R}^n$. Выберем произвольно число $a > 0$. Для этого числа найдется число $\delta = \delta(a)$, для которого выполнено условие предложения 4.2 относительно множества E, соответствующего условию леммы 4.2. Используя оценку (4.2) из леммы 4.1, из условия (4.7) получаем $\operatorname{cap} f(\mathscr{E}) \leqslant \alpha(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, где $\alpha(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$. Тогда для числа $\delta=\delta(a)$ найдется $\varepsilon_* = \varepsilon_*(a)$ такое, что

$$\operatorname{cap} f(\mathscr{E}) \leqslant \delta, \qquad \varepsilon\in(0,\varepsilon_*(a)). \tag{4.8}$$

Используя соотношение (4.8), получаем

$$\operatorname{cap}\bigl(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus E, f(\overline{B(x_0,\varepsilon)})\bigr) \leqslant \operatorname{cap}\bigl(f(B(x_0,r_0)), f(\overline{B(x_0,\varepsilon)})\bigr) \leqslant \delta, \qquad \varepsilon\in(0,\varepsilon_*(a)).$$

Тогда из предложения 4.2 следует, что $h(f(\overline{B(x_0,\varepsilon)})) < a$. Окончательно, для любого $a>0$ существует $\varepsilon_*=\varepsilon_*(a)$ такое, что $h(f(\overline{B(x_0,\varepsilon)})) < a$, как только $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*(a))$. Лемма доказана.

Предложение 4.3. *Пусть $Q\colon D\to[1,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция, $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $x_0\in D$, такие, что либо $Q\in FMO(x_0)$, либо $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r\to 0$. Тогда можно указать $\varepsilon_0\in(0,1)$ и функцию $\psi_\varepsilon(t)\equiv\psi(t)>0$ такие, что в точке x_0 выполнено условие (4.7) леммы 4.2.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Пусть $Q\in FMO(0)$ и $\varepsilon_0 < \min\{\operatorname{dist}(0,\partial D), e^{-1}\}$. На основании предложения 2.1 для функции $0<\psi(t) = (t\log(1/t))^{-1}$ имеем

$$\int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dm(x) = O\biggl(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\biggr).$$

Заметим также, что

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt = \frac{\log(\log(1/\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon_0)}.$$

Таким образом, утверждение предложения 4.3 в случае $Q \in FMO$ доказано. Покажем его справедливость в случае $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r \to 0$. Как и прежде, можно считать, что $x_0 = 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < \min\{\mathrm{dist}(0, \partial D), 1\}$. Положим $\psi(t) = (t \log(1/t))^{-1}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\, dm(x)}{(|x| \log \frac{1}{|x|})^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int\limits_{|x|=r} \frac{Q(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n}\, dS \right) dr$$
$$\leqslant c\omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r \log(1/r)} = c\omega_{n-1} \log \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon_0)} = c\omega_{n-1} I(\varepsilon, \varepsilon_0),$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$, а c – некоторая постоянная. Предложение 4.3 полностью доказано.

Сформулируем теперь важнейшую теорему этого параграфа, справедливость которой непосредственно следует из леммы 4.2, предложения 4.3 и предложения 4.1.

Теорема 4.1. *Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ – компактное множество положительной емкости, $\mathfrak{F}_Q$ – семейство открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ такое, что либо $Q \in FMO(D)$, либо $q_{x_0}(r) = O([\log(1/r)]^{n-1})$, $r \to 0$, для произвольного $x_0 \in D$. Тогда $\mathfrak{F}_Q$ образует нормальное семейство отображений.*

§ 5. Устранение изолированных особенностей. Теоремы типа теорем Сохоцкого, Пикара, Лиувилля

Лемма 5.1. *Пусть $f\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$, удовлетворяющее условию $\mathrm{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0$. Предположим, что существует $0 < \varepsilon_0 < 1$ такое, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \psi^n(|x|)\, dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{5.1}$$

где $\psi(t)$ – неотрицательная на $(0, \infty)$ функция такая, что $\psi(t) > 0$ при почти всех t и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty, \qquad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда f имеет непрерывное продолжение $f\colon \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в $\mathbb{B}^n$. Непрерывность понимается в смысле пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно хордальной метрики h.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0 = 0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, с $x_j \to 0$, $x_j' \to 0$ такие, что $h(f(x_j), f(x_j')) \geqslant a > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(\varepsilon_0)$. Положим $r_j = \max\{|x_j|, |x_j'|\}$. Соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(r_j)} \setminus \{0\}$. Обозначим эту кривую через C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = (\mathbb{B}^n \setminus \{0\}, C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f

получаем, что $f(E_j)$ также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и $\Gamma_{f(E_j)}$ (см. обозначения предложения 3.1). Пусть Γ_j^* – семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E_j)}$ при отображении f с началом в C_j, лежащих в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Рассуждая так же, как в лемме 3.1, имеем $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$. Так как $\Gamma_{f(E_j)} > f(\Gamma_j^*)$, то

$$M(\Gamma_{f(E_j)}) \leqslant M(f(\Gamma_j^*)) \leqslant M(f(\Gamma_{E_j})). \tag{5.2}$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} разбивается на два подсемейства,

$$\Gamma_{E_j} = \Gamma_{E_{j_1}} \cup \Gamma_{E_{j_2}}, \tag{5.3}$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ – семейство всех кривых $\alpha(t)\colon [a,c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k \in [a,c)$ с $\alpha(t_k) \to 0$, при $t_k \to c-0$, $\Gamma_{E_{j_2}}$ – семейство всех кривых $\alpha(t)\colon [a,c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдется $t_k \in [a,c)$ с $\operatorname{dist}(\alpha(t_k), \partial\mathbb{B}^n) \to 0$ при $t_k \to c-0$.

В силу соотношений (5.2) и (5.3) имеем

$$M(\Gamma_{f(E_j)}) \leqslant M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) + M(f(\Gamma_{E_{j_2}})). \tag{5.4}$$

Покажем, что $M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) = 0$ для любого фиксированного $j \in \mathbb{N}$. Зафиксируем целое число $j \geqslant 1$ и положим $l_j = \min\{|x_j|, |x_j'|\}$. Рассмотрим кольцо $A_{\varepsilon,j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < l_j\}$ и соответствующее семейство функций

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi(t)}{I(\varepsilon, l_j)}, & t \in (\varepsilon, l_j), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, l_j). \end{cases}$$

Имеем

$$\int_\varepsilon^{l_j} \eta_\varepsilon(t)\,dt = \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)} \int_\varepsilon^{l_j} \psi(t)\,dt = 1.$$

Следовательно, по определению кольцевого Q-отображения

$$M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) \leqslant \mathscr{F}(\varepsilon) := \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)^n} \int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x). \tag{5.5}$$

Покажем, что $\mathscr{F}(\varepsilon) \to 0$. Учитывая (5.1), имеем следующее соотношение:

$$\int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x) = G(\varepsilon)\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt\right)^n,$$

где $G(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Заметим, что

$$\mathscr{F}(\varepsilon) = G(\varepsilon)\left(1 + \frac{\displaystyle\int_{l_j}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt}{\displaystyle\int_\varepsilon^{l_j} \psi(t)\,dt}\right)^n,$$

где $\displaystyle\int_{l_j}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty$ – фиксированное число, а $\displaystyle\int_\varepsilon^{l_j} \psi(t)\,dt \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, поскольку величина интеграла слева в (5.1) увеличивается при уменьшении ε. Таким образом, $\mathscr{F}(\varepsilon) \to 0$. Отметим, что левая часть неравенства (5.5) не зависит от ε, а j фиксировано. Отсюда получаем, что $M(f(\Gamma_{E_{j_1}}))=0$. Фиксируем произвольно некоторое $\varepsilon_1<\varepsilon_0$. В силу соотношения (5.1) можно считать, что $I(\varepsilon,r_i)>0$, $\varepsilon\in(0,r_i)$. Аналогично схеме, приведенной выше, рассмотрим кольцо $A_j=\{x\in\mathbb{R}^n : r_j<|x|<\varepsilon_1\}$ и семейство функций

$$\eta_j(t)=\begin{cases}\psi(t)/I(r_j,\varepsilon_1), & t\in(r_j,\varepsilon_1),\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(r_j,\varepsilon_1).\end{cases}$$

Имеем

$$\int_{r_j}^{\varepsilon_1}\eta_j(t)\,dt=\frac{1}{I(r_j,\varepsilon_1)}\int_{r_j}^{\varepsilon_1}\psi(t)\,dt=1.$$

Таким образом, по определению кольцевого Q-отображения и условию (5.4) получаем

$$M(f(\Gamma_{E_j}))\leqslant\mathscr{S}(r_j):=\frac{1}{I(r_j,\varepsilon_1)^n}\int_{r_j<|x|<\varepsilon_0}Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x).$$

В силу условия (5.1) имеем $\mathscr{S}(r_j)\to0$, $j\to\infty$. Окончательно, $\operatorname{cap} f(E_j)\to0$, $j\to\infty$, в силу предложения 3.1. С другой стороны, $\operatorname{cap} f(E_j)\geqslant\delta>0$, $j\in\mathbb{N}$, в силу предложения 4.2. Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x\to0$ в $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Выбирая в лемме 5.1 функцию $\psi(t)=(t\log(1/t))^{-1}$, в силу предложения 2.1 получаем следующую теорему.

Теорема 5.1. *Пусть $x_0\in D$, $f\colon D\setminus\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}}^n$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, удовлетворяющее условию* $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}}^n\setminus f(D\setminus\{x_0\}))>0$. *Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, то f имеет непрерывное продолжение $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$.*

Следствие 5.1. *В частности, если*

$$\int_{|x-x_0|<\varepsilon}Q(x)\,dm(x)=O(\varepsilon^n),\qquad\varepsilon\to0,\tag{5.6}$$

то f имеет непрерывное продолжение в D.

Выбирая в лемме 5.1 функцию $\psi(t)=(t\log(1/t))^{-1}$, получаем также следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть $x_0\in D$, $f\colon D\setminus\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}}^n$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, удовлетворяющее условию* $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}}^n\setminus f(D\setminus\{x_0\}))>0$. *Если*

$$q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right),\qquad r\to0,\tag{5.7}$$

где $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x-x_0|=r$, то f имеет непрерывное продолжение $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}^n$. В частности, если при некотором $\varepsilon(x_0)$ и некоторой постоянной $c>0$ выполнено

$$Q(x)\leqslant c\left[\log\frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1},\qquad x\in B(x_0,\varepsilon(x_0)),$$

то выполнено (5.6) и, значит, справедливо заключение теоремы.

Теорема 5.3. *Пусть x_0 – изолированная точка границы D, $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0=0$, а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если x_0 – существенная особая точка отображения f, то $\mathrm{cap}(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(U\setminus\{x_0\}))=0$ для любой окрестности U точки x_0.*

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 5.1, 5.2 и следствия 5.1 соответственно.

Теорема 5.4. *Пусть x_0 – изолированная точка границы D, $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Тогда точка x_0 является устранимой для отображения f в том и только том случае, когда f ограничено в некоторой окрестности U точки x_0.*

Доказательство. Предположим, что точка x_0 устранима, т.е. существует предел $\lim_{x\to x_0} f(x)=A<\infty$. Тогда $|f(x)|\leqslant |A|+1$ в достаточно малой окрестности U точки x_0. Обратно, пусть существует окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x)|\leqslant M$ для некоторого $M\in(0,\infty)$ и всех $x\in U\setminus\{x_0\}$. Тогда $\mathrm{cap}(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(U\setminus\{x_0\}))>0$ и заключение теоремы следует из теоремы 5.3.

Теорема 5.5. *Пусть x_0 – изолированная точка границы D, $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий (5.6), (5.7). Если $\mathrm{cap}(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(U\setminus\{x_0\}))>0$ для некоторой окрестности U точки x_0, то f может быть непрерывным образом продолжено до открытого дискретного кольцевого Q-отображения $f\colon D\cup\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$.*

Доказательство. Действительно, f продолжается до непрерывного отображения $f\colon D\cup\{x_0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$ в силу теорем 5.1, 5.2 и следствия 5.1 соответственно. Известно, что дискретные открытые отображения в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, либо сохраняют ориентацию, либо анти-сохраняют (см., например, раздел 4 гл. I в [8]). Пусть f для определенности сохраняет ориентацию. Покажем, что продолженное отображение сохраняет ориентацию, открыто и дискретно. Обозначим, как обычно, через $B_f(D)$ множество точек ветвления отображения f в области D, а через $B_f(D')$ – множество точек ветвления отображения f в области $D'=D\cup\{x_0\}$. Если x_0 – точка локальной гомеоморфности отображения f, то сформулированное выше утверждение очевидно. Пусть точка $x_0\in B_f(D')$. По теореме Чернавского

$$\dim B_f(D)=\dim f(B_f(D))\leqslant n-2,$$

(см., например, теорему 4.6 гл. I в [8]), где dim обозначает топологическую размерность множества (см. [29]). Тогда получим

$$\dim f(B_f(D'))\leqslant n-2, \tag{5.8}$$

так как $f(B_f(D'))=f(B_f(D))\cup\{f(x_0)\}$, множество $\{f(x_0)\}$ замкнуто и топологическая размерность каждого из множеств $f(B_f(D))$ и $\{f(x_0)\}$ не превышает

$n-2$ (см. [29; гл. III, раздел 3, следствие 1]). Пусть G – область в D', $G \Subset D'$, и пусть $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Тогда в силу (5.8) существует точка $y_0 \notin f(B_f(D'))$, принадлежащая той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus f(\partial G)$, что и y. В силу того, что топологический индекс есть величина постоянная на каждой связной компоненте множества $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus f(\partial G)$ (см. § 2 гл. I в [7]), имеем

$$\mu(y, f, G) = \mu(y_0, f, G) = \sum_{x \in G \cap \{f^{-1}(y_0)\}} i(x, f) > 0.$$

Таким образом, отображение f сохраняет ориентацию в D'. Наконец, для любого $y \in f(D')$ в силу дискретности отображения f в области D множество $\{f^{-1}(y)\}$ не более чем счетно и потому $\dim\{f^{-1}(y)\} = 0$. Следовательно (см. [30; с. 333]), отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать.

Теорема 5.6 (аналог теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса). *Пусть x_0 – изолированная точка границы D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}^n$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (5.6), (5.7). *Если x_0 – существенная особая точка отображения f, то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}}^n$ найдется последовательность $x_k \to x_0$, $k \to \infty$, такая что $f(x_k) \to a$, $k \to \infty$.*

Доказательство. Допустим, что заключение теоремы неверно для некоторого $a \in \overline{\mathbb{R}}^n$. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$h(f(x), a) \geqslant \varepsilon_0, \qquad x \in U \setminus \{x_0\},$$

и по неравенству треугольника $d_0 = h(B(a, \varepsilon_0/2), f(U \setminus \{x_0\})) \geqslant \varepsilon_0/2$. Следовательно, $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}}^n \setminus f(U \setminus \{x_0\})) > 0$. Отсюда по теореме 5.3 следует существование предела (конечного или бесконечного) отображения f в точке x_0, что противоречит первоначальному предположению.

Теорема 5.7. *Пусть x_0 – изолированная точка границы D, $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}^n$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, а функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (5.6), (5.7). *Если x_0 – существенно особая точка отображения f, то существует множество $C \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ типа F_σ в $\overline{\mathbb{R}}^n$ емкости нуль такое, что*

$$N(y, f, U \setminus \{x_0\}) = \infty$$

для любой окрестности U точки x_0 и для всех $y \in \overline{\mathbb{R}}^n \setminus C$.

Доказательство. Пусть U – произвольная окрестность точки x_0. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $U = \mathbb{B}^n$. Рассмотрим множества $V_k = B(1/k) \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \dots$. Положим

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\mathbb{R}}^n \setminus f(V_k). \tag{5.9}$$

По теореме 5.3 каждое из множеств $B_k := \overline{\mathbb{R}}^n \setminus f(V_k)$ в объединении правой части соотношения (5.9) имеет емкость нуль. Тогда C также имеет емкость нуль (см., например, [31; гл. III, раздел 3, п. 1.3, следствие]). Фиксируем $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Тогда

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(V_k). \tag{5.10}$$

Из условия (5.10) вытекает существование последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, такой, что $x_i \to 0$, $i \to \infty$ и $f(x_i) = y$, $i = 1, 2, \dots$. Теорема 5.7 доказана.

Пусть теперь D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, содержащая внешность некоторого шара $B(r_0)$, $r_0 > 0$. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, если функция $\varphi^*(x) = \varphi(x/|x|^2)$ имеет конечное среднее колебание в точке нуль. Заметим, что отображение $\psi(x) = x/|x|^2$ подобно отображает сферу $S(0, r)$ на сферу $S(0, 1/r)$, откуда следует, что $|J(x, \psi)| = (1/|x|)^{2n}$. Согласно сказанному, используя замену переменной в интеграле, мы можем переформулировать определение конечного среднего колебания в точке ∞ в следующем виде. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞ (пишем $\varphi \in FMO(\infty)$), если

$$\int_{|x|>R} |\varphi(x) - \varphi_R| \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right), \qquad R \to \infty,$$

где

$$\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \int_{|x|>R} \varphi(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}}.$$

Аналогично, для бесконечности можно переформулировать условия вида (5.6), (5.7) следующим образом:

$$\int_{|x|>R} Q(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right), \tag{5.11}$$

$$⨍_{S(0,R)} Q(x)\, dS = O([\log R]^{n-1}). \tag{5.12}$$

Будем говорить, что отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q-отображение в точке* $x_0 = \infty$, если отображение $\widetilde{f} = f(x/(|x|^2))$ является кольцевым Q'-отображением в точке $x_0 = 0$ с $Q' = Q(x/(|x|^2))$. Иначе говоря, отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ будем называть *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 = \infty$, если соотношение

$$M(f(\Gamma(S(R_1), S(R_2), A))) \leqslant \int_A Q(y) \eta^n(|y|)\, dm(y)$$

выполнено в кольце $A = A(R_1, R_2, 0) = \{R_1 < |y| < R_2\}$ для произвольных $0 < R_1 < R_2 < \infty$ и произвольной неотрицательной измеримой функции $\eta\colon (R_1, R_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{R_1}^{R_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1.$$

На основании теорем 5.1, 5.2 и следствия 5.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 5.8 (аналог теоремы Лиувилля). *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение в точке* $x_0 = \infty$, *функция* $Q(x)$ *либо имеет конечное среднее колебание в точке* ∞, *либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (5.11), (5.12). *Тогда* $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) = 0$. *В частности,* f *не может отображать все* $\mathbb{R}^n$ *на ограниченную область.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) > 0$. Тогда в силу теоремы 5.5 отображение f продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения $f\colon \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$. В таком случае множество $f(\overline{\mathbb{R}^n})$ одновременно открыто и замкнуто в $\overline{\mathbb{R}^n}$, откуда следует, что $f(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathbb{R}^n}$. Однако последнее противоречит сделанному предположению о том, что $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) > 0$.

Рассмотрим отдельно случай $n = 2$. Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Теорема 5.9. *Пусть* $f\colon \Delta \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{C}}$ *– открытое дискретное* Q*-отображение, которое не принимает, по крайней мере, три значения в* $\overline{\mathbb{C}}$. *Если* $Q(z)$ *либо имеет конечное среднее колебание в нуле, либо удовлетворяет одному из условий типа* (5.6), (5.7) *в точке* $z_0 = 0$, *то отображение* f *может быть непрерывным образом продолжено в* Δ *до открытого дискретного* Q*-отображения* $\overline{f}\colon \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство основано на теореме Стоилова о факторизации (см. раздел 5 гл. V в [32]). Согласно упомянутой теореме отображение f может быть представлено как композиция $f = \varphi \circ g$, где g – гомеоморфизм, φ – аналитическая функция. Не ограничивая общности, можно считать, что отображение g является Q-гомеоморфизмом в $\Delta \setminus \{0\}$. По лемме 4.1, теореме 4.1 и следствию 4.2 из [19] отображение g допускает гомеоморфное продолжение $\overline{g}$ в Δ. В таком случае точка $\overline{g}(0)$ является изолированной точкой границы области $g(\Delta)$ для функции φ. Из условия вытекает, что φ также не принимает, по крайней мере, три значения в $\overline{\mathbb{C}}$. Возможность непрерывного продолжения для f следует теперь из классической теоремы Пикара для аналитических функций.

Теорема 5.10 (аналог теоремы Пикара при $n = 2$). *Пусть* $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ *– открытое дискретное* Q*-отображение, а* $Q(z)$ *либо имеет конечное среднее колебание в* ∞, *либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (5.11), (5.12). *Тогда* f *принимает все значения в* $\overline{\mathbb{C}}$ *кроме, может быть, двух.*

§ 6. О точности условий на $Q(x)$ и отображение f

Следующие примеры показывают, что условия на функцию $Q(x)$ и отображение f, сформулированные в предыдущем параграфе, являются точными в некотором смысле. Прежде всего, условия на Q нельзя заменить более простым условием $Q(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}$ ни для какого сколь угодно большого $p > 1$.

Теорема 6.1. *Для каждого* $p > 1$ *найдется открытое дискретное* Q*-отображение (более того, гомеоморфизм)* $f\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ *с* $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$, $n \geqslant 2$, *для которого точка* $x_0 = 0$ *является изолированной существенно особой* *точкой и которое не удовлетворяет ни одному из заключений теорем* 5.3, 5.6, 5.7.

Доказательство. Зададим гомеоморфизм $f\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{1+|x|^\alpha}{|x|} \cdot x,$$

или, что то же самое, в сферических координатах $R = 1 + r^\alpha$, $\Theta = \vartheta$, где $\alpha \in (0, n/(p(n-1)))$. Не ограничивая общности, за счет увеличения p можно считать, что $\alpha < 1$. Заметим, что f отображает $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на $\{1 < |y| < 2\}$ в $\mathbb{R}^n$ и предельное множество $C(f,0) = \{|y| = 1\}$. Известно, что f является Q-гомеоморфизмом с

$$Q(x) := \left(\frac{1+r^\alpha}{\alpha r^\alpha}\right)^{n-1}, \quad r = |x|$$

(см. предложение 6.3 гл. VI в [2]). При $r < 1$ имеем оценку

$$Q(x) \leqslant \frac{C}{r^{\alpha(n-1)}}, \qquad C := \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n-1}.$$

Следовательно, $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$, поскольку $\alpha p(n-1) < n$. Хотя $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой отображения f, предельное множество $C(f,0)$ есть сфера $\{|y| = 1\} \neq \overline{\mathbb{R}}^n$ и $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}}^n \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0$.

Следующая теорема показывает, что условие открытости отображения f в результатах предыдущего параграфа является существенным.

Теорема 6.2. *При каждом $n \geqslant 2$ найдется дискретное 1-отображение $g\colon \overline{\mathbb{R}}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}^n$ (т.е., отображение, удовлетворяющее оценке вида* (1.2) *в области $D := \overline{\mathbb{R}}^n \setminus \{0\}$ при $Q(x) \equiv 1$), для которого $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой и которое не удовлетворяет ни одному из заключений теорем* 5.3, 5.6, 5.7.

Доказательство. Рассмотрим разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на кубы

$$C_{k_1,\dots,k_n} = \prod_{i=1}^{n} [2k_i - 1, 2k_i + 1], \qquad k_i \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим произвольный куб $C_{k_1,\dots,k_n}$ с $k_1, \dots, k_n \geqslant 0$; случай k_i разных знаков может быть рассмотрен аналогично. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in C_{k_1,\dots,k_n}$. Если $k_1 = 0$, то $g_{m_1}(x) := x$. Пусть $k_1 > 0$. Положим

$$f_{1,\dots,1,1}(x) = y_{1,\dots,1},$$

где $y_{1,\dots,1,1}$ – симметрическое отражение точки x относительно гиперплоскости $x_1 = 2k_1 - 1$. Если $2k_1 - 3 = -1$, то процесс завершен. Пусть $2k_1 - 3 > -1$, тогда

$$f_{1,\dots,1,2}(y_{1,\dots,1}) = y_{1,\dots,1,2},$$

где $y_{1,\ldots,1,2}$ – симметрическое отражение точки $y_{1,\ldots,1}$ относительно гиперплоскости $x_1 = 2k_1 - 3$. Если $2k_1 - 5 = -1$, то процесс завершен. Если нет, продолжаем процесс:

$$f_{1,\ldots,1,3}(y_{1,\ldots,1,2}) = y_{1,\ldots,1,3}$$

и т.д. За конечное число шагов m_1 находим функцию

$$g_{m_1} = f_{1,\ldots,1,m_1} \circ \cdots \circ f_{1,\ldots,1,1}$$

такую, что образ $g_{m_1}(x)$ точки x лежит в кубе $C_{0,k_2,k_3\ldots,k_n}$. Полагаем $x_{m_1} := g_{m_1}(x)$.

Далее, если $k_2 = 0$, то

$$g_{m_2}(x_{m_1}) = g_{m_1}(x_{m_1}).$$

При $k_2 > 0$ относительно точки x_{m_1} проделываем ту же операцию, но относительно координаты x_2. Полагаем

$$f_{1,\ldots,1,2,m_1}(x_{m_1}) = y_{1,\ldots,1,2,m_1},$$

где $y_{1,\ldots,1,2,m_1}$ – симметрическое отражение точки x_{m_1} относительно гиперплоскости $x_2 = 2k_2 - 1$. Если $2k_2 - 3 = -1$, то процесс завершен. Если нет, продолжаем до тех пор, пока не получим отображение

$$g_{m_2} = f_{1,\ldots,m_2,m_1} \circ \cdots \circ f_{1,\ldots,2,m_1}$$

такое, что $g_{m_2}(x_{m_1}) \in C_{0,0,k_3\ldots,k_n}$. Полагаем

$$g_{m_1+m_2} := g_{m_2} \circ g_{m_1}, \qquad x_{m_2} := g_{m_1+m_2}(x)$$

и т.д. Через некоторое число шагов $m_0 = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ мы приходим к отображению

$$G_0 = g_{m_n} \circ g_{m_{n-1}} \circ \cdots \circ g_{m_2} \circ g_{m_1}$$

такому, что образ x_{m_n} точки x при отображении G_0 лежит в кубе $C_{0,0,0\ldots,0}$. Сжатие $G_1(x) = (\sqrt{n}/n) \cdot x$ переводит $C_{0,0,0\ldots,0}$ в некоторый куб A_0, полностью лежащий в $\overline{\mathbb{B}}^n$. Положим $G_2 := G_1 \circ G_0$.

Заметим, что точка $z_0 = \infty$ является изолированной существенно особой точкой отображения G_2, причем $C(G_2, \infty) = A_0 \subset \overline{\mathbb{B}}^n$. Тогда отображение

$$g := G_2 \circ G_3, \tag{6.1}$$

где $G_3(x) = x/|x|^2$, имеет изолированную существенно особую точку $x_0 = 0$, причем

$$C(g, 0) \subset \overline{\mathbb{B}}^n. \tag{6.2}$$

По построению отображения g, заданного соотношением (6.1), видно, что оно сохраняет модуль семейств кривых в $\mathbb{R}^n$, т.е. оно является 1-отображением в терминах соотношения (1.2). Ясно также, что g – дискретное отображение. Заметим, что заключения теорем 5.3, 5.6, 5.7 не выполнены, в частности, в силу (6.2) не является справедливой теорема типа теоремы Сохоцкого, так как $\mathrm{cap}(\overline{\mathbb{R}}^n \setminus \overline{\mathbb{B}}^n) > 0$. Причина заключается в том, что g не является открытым отображением в $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus \{0\}$.

§ 7. О приложениях и открытых проблемах

Сформулированные в статье результаты могут быть применены, например, к отображениям с конечным искажением длины (см., например, теорему 8.6 гл. VIII в [2]). Более того, все вышеизложенное справедливо для так называемых отображений с конечным искажением. Отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f\in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ и почти всюду $\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)J(x,f)$ для некоторой функции $K(x)\colon D\to[1,\infty)$ (см., например, [26] и [27]). Иногда предполагают, что выполнено условие $f\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$ вместо условия $f\in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ (см. там же).

Замечание 7.1. Каждое открытое дискретное отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ с конечным искажением такое, что $K\in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$ и мера множества B_f точек ветвления отображения f равна нулю, является Q-отображением с $Q(x)=K^{n-1}(x)$ (см. замечание 8.5 и теорему 8.6 гл. VIII в [2]).

В известной работе [33] В. А. Зорича было сделано предположение о том, что аналог теоремы Пикара верен для отображений с ограниченным искажением; один из вариантов этой теоремы приведен в работе [34]. Аналог теоремы Пикара, сформулированный в настоящей статье относительно изучаемого класса отображений, пока что доказан авторами только при $n=2$. К сожалению, пока неизвестно, верно ли аналогичное утверждение в пространствах бо́льших размерностей. Другой важный вопрос, который пока относится к разряду открытых вопросов, связан с условием дискретности на отображение f в теоремах об устранении особенностей. Авторы предполагают, что оно так же, как и условие открытости, является существенным и не может быть отброшено.

Список литературы

[1] Г. Д. Суворов, *Об искусстве математического исследования*, ТЕАН, Донецк, 1999.

[2] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, New York, 2009.

[3] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.

[4] Ю. Ф. Стругов, “Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем”, *Докл. АН СССР*, **243**:4, (1978), 859–861; англ. пер.: Yu. F. Strugov, “On the compactness of families of mappings that are quasi-conformal in the mean”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:6, (1978), 1443–1446.

[5] В. М. Миклюков, *Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения*, Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2005.

[6] Ch. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, “On conformal dilatation in space”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **22**, (2003), 1397–1420.

[7] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.

[8] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[9] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Definitions for quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **448**, (1969), 1–40.

[10] C. Andreian Cazacu, “On the length-area dilatation”, *Complex Var. Theory Appl.*, **50**:7–11, (2005), 765–776.

[11] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Distortion and singularities of quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **465**, (1970), 1–13.

[12] В. М. Миклюков, “Граничные свойства n-мерных квазиконформных отображений”, *Докл. АН СССР.*, **193**:3, (1970), 525–527; англ. пер.: V. M. Miklyukov, “Boundary properties of n-dimensional quasi-conformal mappings”, *Soviet Math. Dokl.*, **11**, (1970), 969–971.

[13] P. Koskela, K. Rajala, “Mappings of finite distortion: removable singularities”, *Israel J. Math.*, **136**:1, (2003), 269–283.

[14] K. Rajala, “Mappings of finite distortion: removable singularities for locally homeomorphic mappings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:11, (2004), 3251–3258.

[15] В. И. Кругликов, “Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем”, *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6), (1986), 185–206; англ. пер.: V. I. Kruglikov, “Capacity of condensers and spatial mappings quasiconformal in the mean”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1, (1987), 185–205.

[16] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.

[17] F. W. Gehring, “Rings and quasiconformal mappings in space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103**:3, (1962), 353–393.

[18] F. John, L. Nirenberg, “On functions of bounded mean oscillation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**:3, (1961), 415–426.

[19] А. А. Игнатьев, В. И. Рязанов, “Конечное среднее колебание в теории отображений”, *Укр. матем. вестник*, **2**:3, (2005), 395–417; англ. пер.: A. A. Ignat’ev, V. I. Ryazanov, “Finite mean oscillation in the mapping theory”, *Ukr. Math. Bull.*, **2**:3, (2005), 403–424.

[20] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: H. Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.

[21] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **28**, Amer. Math. Soc., New York, 1942.

[22] Э. Беккенбах, Р. Белман, *Неравенства*, Мир, М., 1965; пер. с англ.: E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1961.

[23] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, Dover Publ., New York, 1937.

[24] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985; пер. с англ.: V. G. Maz’ya, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[25] P. Koskela, J. Malý, “Mappings of finite distortion: the zero set of the Jacobian”, *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*), **5**:2, (2003), 95–105.

[26] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric function theory and non-linear analysis*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.

[27] T. Iwaniec, V. Šverák, “On mappings with integrable dilatation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118**:1, (1993), 181–188.

[28] С. П. Пономарев, “N^{-1}-свойство отображений и условие (N) Лузина”, *Матем. заметки*, **58**:3, (1995), 411–418; англ. пер.: S. P. Ponomarev, “The N^{-1}-property of maps and Luzin’s condition (N)”, *Math. Notes*, **58**:3, (1995), 960–965.

[29] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Math. Ser., **4**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1948.

[30] C. J. Titus, G. S. Young, “The extension of interiority, with some applications”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103**:2, (1962), 329–340.

[31] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.

[32] С. Стоилов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций*, Наука, М., 1964; пер. с фр.: S. Stoïlow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[33] В. А. Зорич, "Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства", *Матем. сб.*, **74(116)**:3, (1967), 417–433; англ. пер.: V. A. Zorič, "A theorem of M. A. Lavrent'ev on quasiconformal space maps", *Math. USSR-Sb.*, **3**:3, (1967), 389–403.

[34] S. Rickman, "On the number of omitted values of entire quasiregular mappings", *J. Analyse Math.*, **37**:1, (1980), 100–117.

Р. Р. Салимов (R. R. Salimov)
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк
E-mail: ruslan623@yandex.ru

Поступила в редакцию
23.01.2009 и 19.01.2010

Е. А. Севостьянов (E. A. Sevost'yanov)
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк
E-mail: brusin2006@rambler.ru